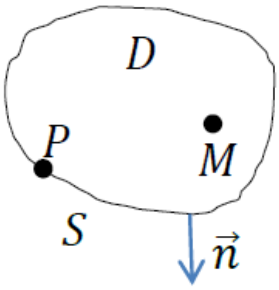
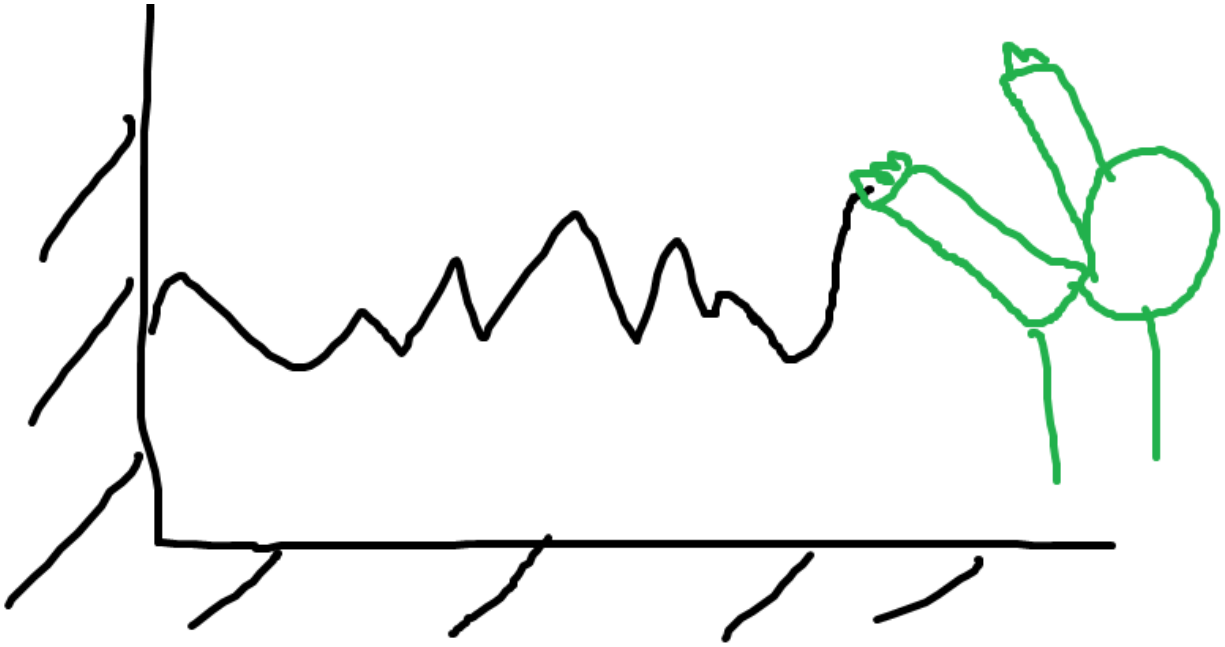
В прошлый раз мы решали пространственно-временные задачи с однородными ГУ. А что сделать, если ГУ неоднородно?



$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u + f(M,t), & M \in D, \quad t > 0, \\ \left(\alpha \dfrac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)\Big|_S = \boxed{\mu(P,t)}, & P \in S, \quad t \geq 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(M), & M \in D. \end{cases}$$

неоднородное ГУ!

Такое ведь вполне может быть. Ну, например, есть шнур, привязанный к стене и мы колеблем его второй колец:

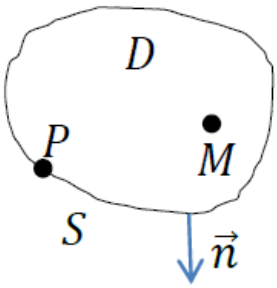


Тогда, естественно, ГУ справа будет неоднородно.

Итак, чё делать?
В курсе дифуров мы узнали, что решение неоднородного дифура можно представить как решение однородного дифура + любое, частное решение неоднородного дифура.

Похожие трюки будут здесь. Представим ответ u в виде суммы двух функций:
v – это функция – решение нашей задачи, только если бы ГУ были бы однородными (мы такое находить умеем, см. предыдущий семинар)
и
w – это функция – решение сугубо пространственной задачи 3 (с ур-ем Лапласа) с неоднородными ГУ. Задачу 3, если область не полный отстой, мы решать тоже умеем.

И сумма v + w оказывается решением нашей задачи.
Не верите? Проверим! Для начала рассмотрим задачу теплопроводности:



$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u + f(M,t), & M \in D, \quad t > 0, \\ \left(\alpha \dfrac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)\Big|_S = \mu(P,t), & P \in S, \quad t \geq 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(M), & M \in D. \end{cases}$$

Тупо подставляем u=v+w:

$$\begin{cases} v_t + w_t = a^2 \Delta v + a^2 \Delta w + f(M,t), & M \in D, \quad t > 0, \\ \left(\alpha \dfrac{\partial v}{\partial n} + \beta v\right)\Big|_S + \left(\alpha \dfrac{\partial w}{\partial n} + \beta w\right)\Big|_S = \mu(P,t), & P \in S, \quad t \geq 0, \\ v|_{t=0} + w|_{t=0} = \varphi(M), & M \in D. \end{cases}$$

Сперва мы должны найти w (и только потом v – это важно). Для w мы ставим вот такую вот задачу 3

$$\begin{cases} \Delta w = 0, & M \in D, \\ \left(\alpha \dfrac{\partial w}{\partial n} + \beta w\right)\Big|_S = \mu(P,t). \end{cases}$$

Обратите внимание – время здесь всё-таки есть, но оно входит сюда исключительно в качестве параметра. Так что это не пространственно-временная задача (тут нет производных по времени), это пространственная задача 3, где t – время – входит в качестве параметра.

Итак, мы решили задачу 3 и нашли w. Возвращаемся сюда

$$\begin{cases} v_t + w_t = a^2 \Delta v + a^2 \Delta w + f(M,t), & M \in D, \quad t > 0, \\ \left(\alpha \dfrac{\partial v}{\partial n} + \beta v\right)\Big|_S + \left(\alpha \dfrac{\partial w}{\partial n} + \beta w\right)\Big|_S = \mu(P,t), & P \in S, \quad t \geq 0, \\ v|_{t=0} + w|_{t=0} = \varphi(M), & M \in D. \end{cases}$$

И сокращаем то, что сокращается:

$$\begin{cases} v_t + w_t = a^2 \Delta v + \cancel{a^2 \Delta w} + f(M,t), \qquad M \in D, \qquad t > 0, \\ \left(\alpha \dfrac{\partial v}{\partial n} + \beta v\right)\Big|_S + \cancel{\left(\alpha \dfrac{\partial w}{\partial n} + \beta w\right)\Big|_S} = \mu(\cancel{P}, t), \qquad P \in S, \qquad t \geq 0, \\ v|_{t=0} + w|_{t=0} = \varphi(M), \qquad M \in D. \end{cases}$$

Теперь для функции $v(M,t)$ получается начально-краевая задача с однородным ГУ, рассмотренная на прошлом семинаре:

$$\begin{cases} v_t = a^2 \Delta v + \tilde{f}(M,t), \qquad M \in D, \qquad t > 0, \\ \left(\alpha \dfrac{\partial v}{\partial n} + \beta v\right)\Big|_S = 0, \qquad P \in S, \qquad t \geq 0, \\ v|_{t=0} = \tilde{\varphi}(M), \qquad M \in D, \end{cases}$$

где $\tilde{f}(M,t) = f(M,t) - w_t$, $\tilde{\varphi}(M) = \varphi(M) - w|_{t=0}$ — известные функции.

Теперь становится понятно, почему нам нужно именно сначала найти w, а лишь потом v. В задаче для v у нас фигурирует w, а в задаче для w ничего про v нет. Поэтому мы сначала находим w, а затем её и её производные подставляем в задачу для v.

Разберём кучу примеров. От Колыбасовой.

Решим задачу теплопроводности на отрезке:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \qquad 0 < x < l, \\ u_x|_{x=0} = 1, \quad u|_{x=l} = l, \\ u|_{t=0} = x. \end{cases}$$

Будем искать решение в виде:

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t),$$

где $w(x,t)$ — достаточно гладкая функция, удовлетворяющая условиям:

$w_x|_{x=0} = 1, \quad w|_{x=l} = l, w_{xx} = 0$

Вместо лапласиана у нас всего лишь вторая производная по абсциссе, благодаря тому, что у нас одномерный отрезок.

Найти такую функцию w(x,t) проще парёной репы. Вторая производная ноль – значит, она линейна. Её производная в 0 равна единице, но это же линейная функция, значит, её производная равна единица везде. И при x=l должно быть l. Кажется,

$$w(x,t) = x.$$

Колыбасова получает тот же результат: так как вторая производная w ноль, то

$$w = Ax + B,$$

а коэффициенты A, B определить из ГУ:

$$w_x|_{x=0} = A = 1, \quad w|_{x=l} = Al + B = l,$$

откуда $A = 1$, $B = 0$, и

$$w(x,t) = x.$$

Итак, функцию $u(x,t)$ мы ищем в виде:

$u(x,t) = v(x,t) + x.$

После подстановки в исходную задачу получим:

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx}, \qquad 0 < x < l, \qquad t > 0, \\ v_x|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0, \\ v|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

А эта задача однородна и имеет тривиальное решение: $v \equiv 0$. Таким образом, решение исходной начально-краевой задачи:

$u(x,t) = x.$

Прокомментируем результат. Представьте себе отрезок, начальное распределение по которому прямо пропорционально координате. Т.е. слева холодрыга, а справа жара.

На правом конце поддерживается температура (как мы уже выяснили, эта температура большая), а на левом конце зато зафиксирована производная, что соответствует теплопотоку. Как можно поддерживать теплопоток постоянным с физической точки зрения? Например, светить э/м волной, которая будет нести постоянную мощность.

Если мы так прикинем, то уже начальное распределение соответствует ГУ. Никаких причин ему поменяться нет. Так что всё будет стационарно, в чём мы и убедились.

Второй пример от Колыбасовой. Решим задачу теплопроводности в круге:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, \qquad 0 \le r < 1, \qquad t > 0, \\ u|_{r=1} = t \sin 4\varphi, \\ u|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Будем искать решение в виде:

$$u(r,\varphi,t) = v(r,\varphi,t) + w(r,\varphi,t),$$

Где

$$\begin{cases} \Delta w = 0, \qquad 0 \le r < 1, \\ w|_{r=1} = t \sin 4\varphi . \end{cases}$$

Решение уравнения Лапласа в круге имеет вид

$$w(r,\varphi,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Подстановка в ГУ даёт:

$$w|_{r=1} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = t \sin 4\varphi,$$

откуда $B_4 = t$, а все остальные коэффициенты A_n и B_n равны нулю.

Таким образом,

$$w(r,\varphi,t) = tr^4 \sin 4\varphi.$$

Итак, мы нашли w. W обычно быстро ищется, а вот v помедленней. Это в прошлой задаче нам так фартануло.

Значит, функцию $u(r,\varphi,t)$ мы будем искать в виде:

$$u(r,\varphi,t) = v(r,\varphi,t) + tr^4 \sin 4\varphi.$$

Подставив это выражение в исходную начально-краевую задачу, получим:

$$\begin{cases} v_t + r^4 \sin 4\varphi = \Delta v, \qquad 0 \le r < 1, \qquad t > 0, \\ v|_{r=1} + t \sin 4\varphi = t \sin 4\varphi, \\ v|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases} v_t = \Delta v - r^4 \sin 4\varphi , \qquad 0 \le r < 1, \qquad t > 0, \\ v|_{r=1} = 0, \\ v|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Вот мы и получили для v пространственно-временную задачу с однородными ГУ. Ищем СФ. Где? В круге.

$$u_{0k}(r,\varphi) = R_{0k}(r)\Phi_0(\varphi) = J_0\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)}} r\right), \qquad k = 1, 2, \dots;$$

$$u_{nk}(r,\varphi) = R_{nk}(r)\Phi_n(\varphi) = J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}} r\right) \cos n\varphi , \qquad n = 1, 2, \dots; \;\; k = 1, 2, \dots;$$

$$u_{-nk}(r,\varphi) = R_{nk}(r)\Phi_{-n}(\varphi) = J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}} r\right) \sin n\varphi , \qquad n = 1, 2, \dots; \;\; k = 1, 2, \dots$$

При каких ГУ? Дирихле.

У нас возникла неоднородность $f(r,\varphi,t)=r^4\sin 4\varphi$. Её надо разложить по СФ круга Дирихле.

Давайте думать. В f(r, φ,t) Sin4φ… значит, нам потребуются функции с n=4. Ну то есть вот такие

$$J_4\left(\sqrt{\lambda_k^4}\, r\right)\sin 4\varphi$$

Буткарёв их бы обозначил как u_{4k}^{s} - т.е. n=4, а буква «s» подчёркиваем, что мы берём синусовые СФ.

Осталось представить r^4 как разложение вот по таким вот функциям

$$J_4\left(\sqrt{\lambda_k^4}\, r\right)$$

Тут уж делать нечего, придётся считать интеграл. Напомню формулы:

Квадрат нормы nk-той функции Бесселя в случае Дирихле:

$$\frac{a^2}{2} J_n'^{\,2}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\, a\right)$$

Где

$\lambda_k^{(n)}$ — k-й положительный корень уравнения $J_n\left(\sqrt{\lambda} a\right) = 0,$

Квадрат нормы nk-той функции Бесселя в случае Неймана:

$$\frac{a^2}{2}\left(1 - \frac{n^2}{\lambda_k^{(n)} a^2}\right) J_n^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\, a\right)$$

Где

$\lambda_k^{(n)}$ — k-й положительный корень уравнения $J_n'\left(\sqrt{\lambda} a\right) = 0,$

А уж если ГУ 3-го рода

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} + hu\right)\Big|_{r=a} = 0,$$

То любое из двух возможных выражений

$$\frac{a^2}{2}\left(1-\frac{a^2h^2-n^2}{\lambda_k^{(n)}a^2}\right)J_n^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)=\frac{a^2}{2}\left(1+\frac{\lambda_k^{(n)}a^2-n^2}{a^2h^2}\right){J_n'}^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)$$

Где

$\lambda_k^{(n)}$ — k-й положительный корень уравнения $\sqrt{\lambda}J_n'(\sqrt{\lambda}a)+hJ_n(\sqrt{\lambda}a)=0$

Итак, f_k будет

$$\frac{1}{\frac{1^2}{2}J_4'\left(\sqrt{\lambda_k^4}\,r\right)}\cdot\int_0^1 J_4\left(\sqrt{\lambda_k^4}\,r\right)\cdot r^4\,dr$$

Найдя $f_k(t)$, найдём $T_k(t)$ – коэфы, с которыми входят СФ в разложение v(t):

$$T_n(t)=\varphi_n e^{-\lambda_n a^2 t}+\int_0^t \underbrace{e^{-\lambda_n a^2(t-\tau)}}_{\text{функция Коши}} f_n(\tau)\,d\tau.$$

(первого слагаемого не будет, т.к. φ() тождественный нуль, а вот второе ещё как будет).

Затем найдём v виде разложения по СФ

$$V=\sum_{k=1}^{\infty}T_{4k}(t)\cdot J_4\left(\sqrt{\lambda_k^4}\,r\right)\sin 4\varphi$$

А затем добавим w и получим u. Ну как вам задача? На КР буде три, на все три – 45 мин ☺

Замечу, однако, что наш алгоритм может давать сбой – иногда задача 3 в нашей области не решается (как правило, это происходит из-за ГУ Неймана), и, как следствие, w не находится. Значит ли это, что раз не имеет решения

задача 3, то и исходная пространственно-временная задача не имеет решения?

Оказывается, нет. В этом случае придётся понизить наши требования к функции w: убрать дифур Лапласа, потребовав лишь, чтобы она удовлетворяла неоднородным ГУ

$$\left(\alpha\frac{\partial w}{\partial n}+\beta w\right)\Big|_S=\mu(P,t)$$

А её лапласиан был бы пусть и ненулевым, но непрерывным в данной области.

Посмотрим, что получится.

$$\begin{cases} v_t+w_t=a^2\,\Delta\,v+a^2\,\Delta\,w+f(M,t), & M\in D, \quad t>0,\\ \left(\alpha\frac{\partial v}{\partial n}+\beta v\right)\Big|_S+\left(\alpha\frac{\partial w}{\partial n}+\beta w\right)\Big|_S=\mu(P,t), & P\in S, \quad t\geq 0,\\ v|_{t=0}+w|_{t=0}=\varphi(M), & M\in D. \end{cases}$$

И тогда пространственно-временная задача для v будет

$$\begin{cases} v_t=a^2\,\Delta\,v+\tilde{f}(M,t), & M\in D, \quad t>0,\\ \left(\alpha\frac{\partial v}{\partial n}+\beta v\right)\Big|_S=0, & P\in S, \quad t\geq 0,\\ v|_{t=0}=\tilde{\varphi}(M), & M\in D, \end{cases}$$

где $\tilde{f}(M,t)=f(M,t)-w_t+\underline{a^2\,\Delta\,w}$, $\tilde{\varphi}(M)=\varphi(M)-w|_{t=0}$ — известные функции.

Почти то же самое, что было раньше, только за счёт того, что лапласиан w не занулится, возникнет дополнительное слагаемое, подчёркнутое голубым. Но это не смертельно. Кстати, заметьте, если лапласиан w будет неограниченным, то тогда f с волной будет также не всюду непрерывной и у нас возникнут проблему. Так что требование на непрерывность (или на ограниченность, это одно и то же) лапласиана w в области не просто так.

Весь вопрос в нахождении w в таком случае, который превращается в угадайку.

Пример от Колыбасовой:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u, \qquad 0 \le r < 1, \qquad t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = 1, \\ u|_{t=0} = \dfrac{r^2}{2}, \\ u_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Задача 3 для w запишется как

$$\begin{cases} \Delta w = 0, \qquad 0 \le r < 1, \\ \left.\dfrac{\partial w}{\partial r}\right|_{r=1} = 1. \end{cases}$$

И она не решается, т.к. ГУ Неймана

$$\int\limits_S \frac{\partial w}{\partial n} dl = \int\limits_0^{2\pi} \left.\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{r=1} d\varphi = 2\pi \ne 0.$$

В этом случае нам надо сбавить претензии к функции w, убрав требование равенства лапласиана нулю и заменив его на требованием его ограниченности.

Давайте посмотрим, что будет, если мы наплюём на это требование ограниченности лапласиана w и возьмём w=r. Очень естественный выбор, производная по r как раз 1 будет.
У r лапласиан с разрывом в нуле:

$$\Delta r = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dr}{dr}\right) = \frac{1}{r}.$$

Итак, ищем решение как u=v+r. Тогда

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 \Delta v + a^2 \Delta r, \qquad 0 \le r < 1, \qquad t > 0, \\ \left.\frac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=1} = 0, \\ v|_{t=0} + r = \frac{r^2}{2}, \\ v_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Подставляем лапласиан:

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 \Delta v + \frac{a^2}{r}, \qquad 0 \le r < 1, \qquad t > 0, \\ \left.\frac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=1} = 0, \\ v|_{t=0} = \frac{r^2}{2} - r, \\ v_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Ну и это конец, потому что у нас разрывная функция и разложить по СФ мы больше не можем.
Надо было брать w с непрерывным лапласианом! Например, $w=r^2/2$. У неё уже непрерывный лапласиан:

$$\Delta w = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{2}\right)\right) = 2$$

Тогда получим

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2\,\Delta\, v + 2a^2, \qquad 0 \le r < 1, \qquad t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=1} = 0, \\ v|_{t=0} = 0, \\ v_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

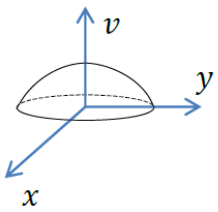
И это уже разложится по СФ круга с ГУ Неймана. Однако Колыбасова предлагает воспользоваться физическим смыслом.

Но можно и угадать решение сразу. Заметим, что в правой части НУ и в неоднородности $2a^2$ в ДУ не фигурируют переменные r, φ, а ГУ имеет вид $\left.\frac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=1} = 0$, а всё это наводит на мысль, что и решение можно искать не зависящим от r, φ. Если предположить, что $v = v(t)$, то ГУ выполнено автоматически, и остаются условия:

$$\begin{cases} v''(t) = 2a^2, \\ v(0) = 0, \\ v'(0) = 0. \end{cases}$$

Проинтегрировав ДУ с учётом НУ, получим:

$v = a^2t^2$.



Также мы могли бы угадать решение исходя из его физического смысла. Уравнение колебаний в круге описывает поперечные колебания круглой упругой мембраны. Однородное условие Неймана означает, что края не закреплены. Однородные НУ означают, что в начальный момент мембрана покоится в положении равновесия. Функция $2a^2$ в правой части означает, что к мембране приложена постоянная внешняя сила, направленная перпендикулярно плоскости мембраны и распределённая равномерно по ней с плотностью $2a^2$ на единицу массы. Тогда очевидно, что мембрана будет двигаться равноускоренно, не деформируясь, т.е. закон движения $v = a^2t^2$.

Таким образом, решение исходной начально-краевой задачи имеет вид:

$$u(r,\varphi,t) = a^2t^2 + \frac{r^2}{2}.$$